等質ヘッセ領域の双対について(群の表現と調和解析の広がり)

数理解析研究所講究録 1467 巻 2006 年 141-151

等質ヘッセ領域の双対について

横浜市立大学 国際総合科学部 伊師英之 (Hideyuki ISHI)
International College of Arts and Sciences,
Yokohama City University

序.

等質錐や等質ジーゲル領域上の幾何と解析において, 双対錐は重要な役割を果たす ([3], [4], [7], [8], [14]). Vinberg は等質凸領域がクランと呼ばれる非結合的代数と一対一に対応することを示したが ([14, Chapter 2]), これにより等質錐には単位元をもつクランが, その双対錐には双対的な積構造のクランが対応している. この双対の概念を一般の等質凸領域やそれに対応するクランに拡張することは自然な問題である. 志磨 [12] は等質凸領域を含むものとして等質ヘッセ領域なる概念を導入し, Vinberg の結果を拡張して, 等質ヘッセ領域と正規ヘッセ代数の間に一対一の対応を構成した. 一般にヘッセ多様体には双対構造とよばれる接続が定義されるが ([13, 2.3 節]), 一部のヘッセ領域の双対構造は双対ヘッセ領域として実現される. 我々は全ての等質ヘッセ領域に対して双対ヘッセ領域が定義されて, それが再び等質ヘッセ領域になること, そして対応する正規ヘッセ代数同士にも自然な双対関係があることを示した (定理 10). 等質凸領域やクランのカテゴリーはこの双対に関して閉じておらず, 上述の問題は等質ヘッセ領域にまで対象を拡げることで はじめて満足できる解答が与えられたわけである.

等質凸領域は実ジーゲル領域として実現されることが知られているが ([14, Chapter 2, Proposition 5]), 我々は実ジーゲル領域を一般化した拡張ジーゲル領域というヘッセ領域のクラスを導入し, それの双対が再び拡張ジーゲル領域として記述されることを示す一方で (定理 4), 全ての等質ヘッセ領域は拡張ジーゲル領域として実現されることを得た (定理 8). 等質ヘッセ領域が空間としては実ジーゲル領域とベクトル空間の直積であることは既に知られているが ([12, Main Theorem]), 拡張ジーゲル領域としての表示は計量のポテンシャルが明示的に与えられるところに特長がある. 正規ヘッセ代数の構造は対応する拡張ジーゲル領域の構造と直接的に結びついているので ((3.2) 参照), 領域の双対性と代数の双対性の関係も見やすい.

ヘッセ多様体はケーラー多様体の実多様体としての類似とみなすことができ, とくに等質ヘッセ多様体と可解等質ケーラー多様体の理論は平行して展開している ([12], [15]). したがって, ここで考察した拡張ジーゲル領域や その双対性といった概念は, 等質ケーラー多様体の幾何と解析においても大いに役立つものと期待される.

本稿で用いる記号について説明する. 集合 $\mathbb{R}^n$ の元は列ベクトルであるとし, 標準内積 ${}^t xy = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ を $\langle x, y\rangle$ または $\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^n}$ で表し, ユークリッドノルム $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ を $\|x\|$ と表す. 次数 r の実対称行列全体のなす集合を $\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ とし, $x \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ が正定値であることを $x \gg 0$ と書く. ベクトル空間 V 上のアファイ

ン変換全体のなす集合を aff(V), その中で可逆なものからなる部分集合を Aff(V) とする. このとき Aff(V) はリー群をなし, aff(V) には対応するリー代数の構造が入る.

§1. ヘッセ領域とその双対.

1.1. 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の中の領域 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ と $\mathcal{U}$ 上の計量 g の組 $(\mathcal{U}, g)$ は,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} \tag{1.1}$$

が全ての $i, j, k = 1, \ldots, n$ に対して成り立つときヘッセ領域と呼ばれる. この条件は, 任意の $x \in \mathcal{U}$ に対し その適当な近傍 $V_x \subset \mathcal{U}$ 上の函数 $\phi \in C^\infty(V_x)$ が存在して $g_{ij}|_{V_x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}$ となること, すなわち計量 g が局所的に函数のヘッシアンで与えられることと同値である. 函数 ϕ を計量 g のポテンシャルとよび, その勾配写像 $\iota_\phi : V_x \ni x \mapsto \xi \in \mathbb{R}^n$ を $\xi_i := -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ と定義する. このとき ι_ϕ のヤコビ行列 $(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j})_{i,j}$ は非退化行列 $(-g_{ij})_{i,j}$ に等しいから, V_x を十分小さくとれば ι_ϕ は埋め込み写像になる. 空間 $\mathbb{R}^n$ 上の標準接続 D を $\iota_\phi : V_x \to \mathbb{R}^n$ で引き戻して定義される V_x 上の接続を D' とすると, V_x 上のベクトル場 X, Y, Z について

$$Xg(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D'_Y Z)$$

が成り立つ ([13, 定理 2.3.1]). これは D' がポテンシャル ϕ のとり方によらず, $\mathcal{U}$ 上で大域的に定義されることを意味する. 接続 D' をヘッセ領域 $(\mathcal{U}, g)$ の双対接続 (または双対構造) という ([13, 2.3 節]).

1.2. 以後ポテンシャル ϕ は $\mathcal{U}$ 上で定義され, 勾配写像 $\iota_\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ は単射であるとする. このとき像 $\mathcal{U}^* := \iota_\phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ 上の計量 g^* を ι_ϕ が等距離写像になるように定義すると, $(\mathcal{U}^*, g^*)$ はヘッセ領域となる. 実際, 次のようにして定める ϕ のルジャンドル変換 $\phi^* \in C^\infty(\mathcal{U}^*)$ は g^* のポテンシャルである:

$$\phi^*(\xi) := -\langle x, \xi \rangle - \phi(x) \qquad (\xi = \iota_\phi(x) \in \mathcal{U}^*,\ x \in \mathcal{U}).$$

組 $(\mathcal{U}^*, g^*)$ を $(\mathcal{U}, g)$ の双対ヘッセ領域, または単に双対とよぶ. 定義からわかるように, $\mathcal{U}^*$ 上の標準接続は $\mathcal{U}$ 上の双対接続 D' と同値である.

命題 1 ([13, 命題 2.3.3]). ヘッセ領域 $(\mathcal{U}^*, g^*)$ の双対ヘッセ領域は $(\mathcal{U}, g)$ に等しく, $\iota_{\phi^*} = \iota_\phi^{-1}$ および $(\phi^*)^* = \phi$ が成り立つ.

ヘッセ領域 $(\mathcal{U}, g)$ の自己同型群 Aut$(\mathcal{U}, g)$ を

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{U}, g) := \{\, \alpha \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)\,;\, \alpha(\mathcal{U}) = \mathcal{U},\ \alpha^* g = g \,\}$$

によって定義する.

補題 2. (i) 領域 $\mathcal{U}$ を保存するアファイン変換 $\alpha \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ が $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}, g)$ に属する必要十分条件は,

$$\phi(\alpha(x)) = \phi(x) + \langle x, \xi_\alpha \rangle + C_\alpha \qquad (x \in \mathcal{U}) \tag{1.2}$$

が成り立つような $\xi_\alpha \in \mathbb{R}^n$ と $C_\alpha \in \mathbb{R}$ が存在することである.
(ii) (i) のアファイン変換 α が $A_\alpha \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ と $b_\alpha \in \mathbb{R}^n$ によって $\alpha(x) = A_\alpha x + b_\alpha$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ と表されるとき, 新たなアファイン変換 $\alpha^\vee$ を

$$\alpha^\vee(\xi) := {}^{\mathrm{t}}A_\alpha^{-1}(\xi - \xi_\alpha) \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

によって定義する. このとき $\alpha^\vee \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U}^*, g^*)$ であり,

$$\iota_\phi \circ \alpha = \alpha^\vee \circ \iota_\phi \tag{1.3}$$

および $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$ が成り立つ.

自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}, g)$ が $\mathcal{U}$ に推移的に作用するようなヘッセ領域 $(\mathcal{U}, g)$ を等質ヘッセ領域という.

1.3. 任意の領域 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ について, 計量 g を標準内積とすると $(\mathcal{U}, g)$ は $\phi(x) := \|x\|^2/2$ をポテンシャルとするヘッセ領域である. このとき $\iota_\phi(x) = -x$ だから $\mathcal{U}^* = -\mathcal{U}$, さらに $\phi^*(\xi) = \|\xi\|^2/2$ である.

1.4. 正則凸錐（直線を含まない開凸錐）$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ について, その特性函数 $\varphi_\Omega : \Omega \to \mathbb{R}_+$ を

$$\varphi_\Omega(x) := \int_{\Omega'} e^{-\langle x, \xi \rangle} d\xi$$

によって定義する. ただし Ω' は Ω の双対錐 $\left\{ \xi \in \mathbb{R}^n ; \langle x, \xi \rangle > 0 \ (x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}) \right\}$ である. 函数 $\log \varphi_\Omega(x)$ は狭義凸であり, よって そのヘッシアンを $(g_{ij}^{(\Omega)})_{i,j}$ とすると $(\Omega, g^{(\Omega)})$ はヘッセ領域である. 計量 $g^{(\Omega)}$ は Ω の標準ヘッセ計量とよばれ, 錐 Ω を保存する線型変換に関して不変である. したがって Ω が等質錐 (ある線型群が推移的に作用する正則凸錐) のとき, $(\Omega, g^{(\Omega)})$ は等質ヘッセ領域となる. 一般に勾配写像の像 $\iota_{\log \varphi_\Omega}(\Omega)$ は双対錐 Ω' に等しい. とくに Ω が等質錐のとき, $(\Omega', g^{(\Omega')})$ は $(\Omega, g^{(\Omega)})$ の双対ヘッセ領域である (以上については [14, Chapter 1, Section 4] および [13, 第4章] を参照). しかし, 一般の正則凸錐については双対錐 Ω' 上の計量 $g^{(\Omega')}$ と $(g^{(\Omega)})^*$ は必ずしも一致しない ([6]).

正則凸錐 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上の滑らかな正値函数 $\eta : \Omega \to \mathbb{R}_+$ は, 次の 3 つの条件をみたすとき認容的であるという:

(ADM1) ある $\kappa > 0$ があって $\eta(cx) = c^{-\kappa}\eta(x)$ $(x \in \Omega, c > 0)$,

(ADM2) $\log \eta$ のヘッシアンは Ω 上の正定値計量 g^η を与える,

(ADM3) $\iota_{\log\eta}(\Omega) = \Omega'$.
特性函数 φ_Ω は認容的である. 認容的な η について, $\iota_{\log\eta}$ を I_η と書き, η に付随する擬逆元写像とよぶ (cf. [7], [10]). 双対錐 Ω' 上の函数 $\eta^\dagger$ を

$$\eta^\dagger(\xi) := \eta(I_\eta^{-1}(\xi))^{-1} \qquad (\xi \in \Omega') \tag{1.4}$$

によって定義する.

補題 3 ([1, Lemma 8.3]). 函数 $\eta^\dagger$ は Ω' 上認容的であり, $(\Omega', g^{\eta^\dagger})$ は (Ω, g^η) の双対ヘッセ領域である. さらに $I_{\eta^\dagger} = I_\eta^{-1}$ が成り立つ.

1.5. 実ベクトル空間 $\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{r(r+1)/2}$ (内積は $\langle x, \xi \rangle := \mathrm{tr}\,(x\xi)$ で定義する) の中で正定値な行列のなす錐 Ω_r は正則凸錐であり, $\eta_r(x) := (\det x)^{-1}$ $(x \in \Omega_r)$ とすると η_r は認容的である. 計量 g^{η_r} は

$$(g^{\eta_r})_x(y_1, y_2) := \mathrm{tr}\,(x^{-1}y_1x^{-1}y_2) \quad (x \in \Omega_r,\ y_1, y_2 \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}))$$

と計算される. 一般線型群 $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ は Ω_r に $a_r(h)x := hx{}^th$ $(h \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{R}),\ x \in \Omega_r)$ によって推移的に作用し, この作用 a_r は g^{η_r} を不変にする. したがって Ω_r は等質錐であり, (Ω_r, g^{η_r}) は等質ヘッセ領域である. 擬逆元写像の像 $I_{\eta_r}(x)$ は逆行列 x^{-1} に他ならず, 双対錐 Ω_r' は Ω_r と一致し, $\eta_r^\dagger(\xi) = (\det \xi)^{-1}$ $(\xi \in \Omega_r')$ となる.

§2. 拡張ジーゲル領域.

2.1. 小節 1.4 に引き続き正則凸錐 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ をとる. 対称双線型写像 $Q : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ は

$$\Omega(u, u) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \quad (u \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\})$$

をみたすとき Ω-positive であるといい, このとき実ジーゲル領域 $D(\Omega, Q)$ を

$$D(\Omega, Q) := \{\, (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p;\ x - Q(u, u)/2 \in \Omega \,\}$$

と定義する. 錐 Ω 上の認容函数 η を用いて $D(\Omega, Q)$ 上の函数 $\phi = \phi^{\eta, Q}$ を $\phi(x, u) := \log \eta(x - Q(u, u)/2)$ と定めると, そのヘッシアンは $D(\Omega, Q)$ 上の計量 $g^{\eta, Q}$ を与える. とくに $\eta = \varphi_\Omega$ のとき, $g^{\eta, Q}$ は $D(\Omega, Q)$ を保存するアファイン変換に関して不変である. ヘッセ領域 $(D(\Omega, Q), g^{\eta, Q})$ の双対を考えよう. 線型写像 $\Phi_Q^* : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Sym}(p, \mathbb{R})$ を

$$\langle \Phi_Q^*(\xi)u, u' \rangle_{\mathbb{R}^p} = \langle Q(u, u'), \xi \rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad (u, u' \in \mathbb{R}^p,\ \xi \in \mathbb{R}^n) \tag{2.1}$$

によって定める. この定義から, $\xi \in \Omega'$ ならば $\Phi_Q^*(\xi)$ は正定値であることがわかる. 勾配写像 ι_ϕ は

$$\iota_\phi(x, u) = (I_\eta(x - Q(u, u)/2),\ -\Phi_Q^*(I_\eta(x - Q(u, u)/2))u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$

と表され, その像 $D(\Omega, Q)^* = \iota_\phi(D(\Omega, Q))$ は直積 $\Omega^* \times \mathbb{R}^p$ と等しい. さらに

$$\iota_\phi^{-1}(\xi, v) = (I_{\eta^\dagger}(\xi) + Q(\Phi_Q^*(\xi)^{-1}v, \Phi_Q^*(\xi)^{-1}v)/2,\ -\Phi_Q^*(\xi)^{-1}v)$$

を用いて ϕ のルジャンドル変換 ϕ^* は $\phi^*(\xi, u) = \langle \Phi_Q^*(\xi)^{-1}v, v\rangle/2 + \log \eta^\dagger(\xi) - \kappa$ と計算され, そのヘッシアンを g^* とすると $(\Omega^* \times \mathbb{R}^p, g^*)$ が $(D(\Omega, Q), g^{\eta,Q})$ の双対ヘッセ領域となる.

2.2. 小節 2.1 の議論を踏まえて, 我々は拡張ジーゲル領域なる概念を導入する. 正則凸錐 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 認容的な $\eta : \Omega \to \mathbb{R}_+$ と Ω-positive な $Q : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ をとる. さらに線型写像 $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Sym}(q, \mathbb{R})$ と双線型写像 $\diamond : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \ni (u, v) \mapsto u \diamond v \in \mathbb{R}^m$ で, それぞれ次の条件を満たすものを考える:

$$\Phi(x) \gg 0 \qquad (x \in \Omega), \tag{2.2}$$

$$2\|u \diamond v\|_{\mathbb{R}^m}^2 = \langle \Phi(Q(u, u))v, v\rangle_{\mathbb{R}^q} \qquad (u \in \mathbb{R}^p,\ v \in \mathbb{R}^q). \tag{2.3}$$

元 $u \in \mathbb{R}^p$ に対し, 行列 $\lambda_u \in \mathrm{Mat}(m, q; \mathbb{R})$ を $\lambda_u v = u \diamond v$ $(v \in \mathbb{R}^q)$ として定めると, (2.3) は $\Phi(Q(u, u)) = 2\,{}^{\mathrm{t}}\lambda_u \lambda_u \in \mathrm{Sym}(q, \mathbb{R})$ $(u \in \mathbb{R}^p)$ と書き直せる. 領域 $D(\Omega, Q) \times \mathbb{R}^{q+m} = \{\,(x, u, v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m\,;\ x - Q(u, u)/2 \in \Omega\,\}$ 上の函数 $\phi = \phi^{\eta,Q,\Phi,\diamond}$ を

$$\begin{aligned}\phi(x, u, v, w) := \|w\|^2/2 + \langle \Phi(x - Q(u, u)/2)^{-1}(v - {}^{\mathrm{t}}\lambda_u w), v - {}^{\mathrm{t}}\lambda_u w\rangle/2 \\ + \log \eta(x - Q(u, u)/2)\end{aligned} \tag{2.4}$$

と定義する. この ϕ のヘッシアンは領域上の正定値計量 $g^{\eta,Q,\Phi,\diamond}$ を与える. ヘッセ領域 $(D(\Omega, Q) \times \mathbb{R}^{q+m}, g^{\eta,Q,\Phi,\diamond})$ を拡張ジーゲル領域とよぶ. 元 $u_0 \in \mathbb{R}^p$, $v_0 \in \mathbb{R}^q$, $w_0 \in \mathbb{R}^m$ について $\tau_{u_0}^1$, $\tau_{v_0}^2$, $\tau_{w_0}^3 \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{n+p+q+m})$ を, それぞれ

$$\begin{aligned}\tau_{u_0}^1(x, u, v, w) &:= (x + Q(u, u_0) + Q(u_0, u_0)/2,\ u + u_0,\ v + {}^{\mathrm{t}}\lambda_{u_0} w,\ w), \\ \tau_{v_0}^2(x, u, v, w) &:= (x, u,\ v + \Phi(x)v_0,\ w + u \diamond v_0), \\ \tau_{w_0}^3(x, u, v, w) &:= (x, u,\ v + {}^{\mathrm{t}}\lambda_u w_0,\ w + w_0),\end{aligned} \tag{2.5}$$

と定義すると, これらは $\mathrm{Aut}(D(\Omega, Q) \times \mathbb{R}^{q+m}, g^{\eta,Q,\Phi,\diamond})$ に属することが補題 2 (i) からわかる. 一方, 任意の $(x, u, v, w) \in D(\Omega, Q) \times \mathbb{R}^{q+m}$ について

$$(x, u, v, w) = \tau_u^1 \circ \tau_{\Phi(x-Q(u,u)/2)^{-1}(v-{}^{\mathrm{t}}\lambda_u w)}^2 \circ \tau_w^3(x - Q(u, u)/2, 0, 0, 0) \tag{2.6}$$

が成り立つ.

2.3. 小節 2.1 と同様に $\Phi_Q^* : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Sym}(p, \mathbb{R})$ を (2.1) によって定め, 他方で双線型写像 $Q_\Phi^* : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ を

$$\langle x, Q_\Phi^*(v, v')\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \Phi(x)v, v'\rangle_{\mathbb{R}^q} \qquad (v, v' \in \mathbb{R}^q,\ x \in \mathbb{R}^n) \tag{2.7}$$

で定義する．このとき Q^*_Φ は Ω'-positive である．さらに双線型写像 $\diamond' : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ を

$$v \diamond' u := u \diamond v \qquad (u \in \mathbb{R}^p, v \in \mathbb{R}^q) \tag{2.8}$$

によって定めると

$$\begin{aligned}\langle \Phi^*_Q(Q^*_\Phi(v,v))u, u\rangle &= \langle Q(u,u), Q^*_\Phi(v,v)\rangle = \langle \Phi(Q(u,u))v, v\rangle = 2\|u \diamond v\|^2 \\ &= 2\|v \diamond' u\|^2\end{aligned}$$

となるから，データ $\Omega', Q^*_\Phi, \Phi^*_Q, \diamond'$ から拡張ジーゲル領域 $(D(\Omega', Q^*_\Phi)\times\mathbb{R}^{p+m}, g^{\eta^\dagger, Q^*_\Phi, \Phi^*_Q, \diamond'})$ を定義することができる．この領域上の自己同型 $\tilde{\tau}^1_{v_0}$, $\tilde{\tau}^2_{u_0}$, $\tilde{\tau}^3_{w_0}$ $(v_0 \in \mathbb{R}^q,\ u_0 \in \mathbb{R}^p,\ w_0 \in \mathbb{R}^m)$ を (2.5) と同様に定義すると，直接的な計算から

$$(\tau^1_{u_0})^\vee = \tilde{\tau}^2_{-u_0}, \quad (\tau^2_{v_0})^\vee = \tilde{\tau}^1_{-v_0}, \quad (\tau^3_{w_0})^\vee = \tilde{\tau}^3_{-w_0},$$

がわかる．さらに補題 2 (ii) と (2.6) から次の定理を得る．

定理 4. 拡張ジーゲル領域 $(D(\Omega, Q)\times\mathbb{R}^{q+m}, g^{\eta, Q, \Phi, \diamond})$ と $(D(\Omega', Q^*_\Phi)\times\mathbb{R}^{p+m}, g^{\eta^\dagger, Q^*_\Phi, \Phi^*_Q, \diamond'})$ はヘッセ領域として互いに双対である．

2.4. 小節 1.5 と同様 $\mathbb{R}^n := \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ $(n = r(r+1)/2)$, $\Omega := \Omega_r$, $\eta := (\det x)^{-1}$ $(x \in \Omega)$ とする．さらに $\mathbb{R}^p := \mathbb{R}^r$, $\Phi_r(x) := x$ $(x \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}))$ とし，$\mathbb{R}^q := \mathbb{R}^r$,

$$Q_r(u_1, u_2) := (u_1{}^{\mathrm{t}}u_2 + u_2{}^{\mathrm{t}}u_1)/2 \qquad (u_1, u_2 \in \mathbb{R}^r),$$

および $\mathbb{R}^m := \mathbb{R}$, $u \diamond_r v := \langle u, v\rangle/\sqrt{2}$ $(u, v \in \mathbb{R}^r)$ と定めると，これらのデータから拡張ジーゲル領域 $(D(\Omega_r, Q_r) \times \mathbb{R}^{r+1}, g^{\eta_r, Q, \Phi_r, \diamond_r})$ が定義できる．これを改めて $(\mathcal{U}_r, g_r)$ と書く．具体的には

$$\mathcal{U}_r = \{\,(x, u, v, w) \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}\,;\, x - u{}^{\mathrm{t}}u/2 \gg 0\,\},$$

$$\phi(x, u, v, w) = \psi_r(x, u, v, w) - \log\det(x - u{}^{\mathrm{t}}u/2),$$

(ただし $\psi_r(x, u, v, w) := \{\|w\|^2 + \langle (x - u{}^{\mathrm{t}}u/2)^{-1}(u - wv), u - wv\rangle\}/2$) である．写像 $\Psi_r : \mathcal{U}_r \to \mathrm{Sym}(r+2, \mathbb{R})$ を

$$\Psi_r(x, u, v, w) := \begin{pmatrix} 1 & {}^{\mathrm{t}}u/\sqrt{2} & w/\sqrt{2} \\ u/\sqrt{2} & x & v/\sqrt{2} \\ w/\sqrt{2} & {}^{\mathrm{t}}v/\sqrt{2} & 1 + \psi_r(x, u, v, w) \end{pmatrix}$$

と定めると，これは $(\mathcal{U}_r, g_r)$ から錐 $(\Omega_{r+2}, g^{\eta_{r+2}})$ への等距離埋め込みになっている．さらに

$$T^1_u := \begin{pmatrix} 1 & & \\ u/\sqrt{2} & I_r & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad T^2_v := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & I_r & \\ & {}^{\mathrm{t}}v/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad T^3_w := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & I_r & \\ w/\sqrt{2} & & 1 \end{pmatrix}$$

とすると (I_r は r 次の単位行列), $\Psi_r \circ \tau_\bullet^k = a_{r+2}(T_\bullet^k) \circ \Psi_r$ $(k = 1, 2, 3,\ \bullet = u, v, w)$ が成り立つ.

拡張ジーゲル領域 $(\mathcal{U}_r, g_r)$ の双対ヘッセ領域 $(\mathcal{U}_r^*, g_r^*)$ は, u と v の役割を入れ替えたものとして記述される:

$$\mathcal{U}_r^* = \{\, (x, u, v, w) \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R};\ x - v{}^{\mathrm{t}}v/2 \gg 0 \,\},$$
$$\phi^*(x, u, v, w) = \psi_r(x, v, u, w) - \log\det(x - v{}^{\mathrm{t}}v/2) - r.$$

写像 $\Psi_r' : \mathcal{U}_r^* \to \Omega_{r+2}$ を

$$\Psi_r'(x, u, v, w) := \begin{pmatrix} 1 + \psi_r(x, v, u, w) & {}^{\mathrm{t}}u/\sqrt{2} & w/\sqrt{2} \\ u/\sqrt{2} & x & v/\sqrt{2} \\ w/\sqrt{2} & {}^{\mathrm{t}}v/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

と定義すると, これは等距離埋め込みである. 点 $(x, u, v, w) \in \mathcal{U}_r$ について, 勾配写像の像 $\iota_\phi(x, u, v, w) \in \mathcal{U}^*$ を (x', u', v', w') とすると, $\Psi_r(x, u, v, w) \in \Omega_{r+2}$ と $\Psi_r'(x', u', v', w') \in \Omega_{r+2}$ は互いに逆行列になっている.

§3. 正規ヘッセ代数と等質ヘッセ領域.

3.1. 実ユークリッド空間 V (内積は $(\cdot|\cdot)$ で表す) と, 双線型写像 $\triangle : V \times V \ni (x, y) \mapsto x\triangle y \in V$ の組 $(V, \triangle)$ が次の 3 条件を満たすとき, 正規ヘッセ代数とよぶ:

(NHA1) $x\triangle(y\triangle z) - (x\triangle y)\triangle z = y\triangle(x\triangle z) - (y\triangle x)\triangle z \quad (x, y, z \in V)$,

(NHA2) $(x|y\triangle z) - (x\triangle y|z) = (y|x\triangle z) - (y\triangle x|z) \quad (x, y, z \in V)$,

(NHA3) 任意の $x \in V$ について, 左乗法作用素 $L_x : V \ni y \to x\triangle y \in V$ の固有値はすべて実数.

正規ヘッセ代数で, 条件 (NHA2) より強い条件

(NHA2') $(x|y) = s(x\triangle y) \quad (x, y \in V)$ となる V 上の線型形式 $s \in V^*$ が存在する,

を満たすものをクランとよぶ (こちらの方が早くから研究されてきた [14]). ベクトル空間 V には, 括弧積を $[x, y] := x\triangle y - y\triangle x$ と定義することによってリー代数の構造が入る. このリー代数を $\mathfrak{g}_V$ と書くものとすると, これは (NHA3) より分裂型可解リー代数である. 元 $x \in V$ に対し, V 上のアファイン変換 l_x を $l_x(y) := x\triangle y + x \ (y \in V)$ によって定義すると, 写像 $\rho : \mathfrak{g}_V \ni x \mapsto l_x \in \mathrm{aff}(V)$ はリー代数準同型である. これから $\mathfrak{g}_V$ に対応する単連結リー群 G_V の V への作用 ρ が $\rho(\exp x) := \exp l_x \in \mathrm{Aff}(V) \ (x \in \mathfrak{g}_V)$ によって定義できる. 原点 $0 \in V$ を通る G_V-軌道 $\mathcal{U}_V := \rho(G) \cdot 0$ は V の中の領域であり, G_V は $\mathcal{U}_V$ に単純推移的に作用している. 領域 $\mathcal{U}_V$ 上の G_V-不変な計量 g_V を, 原点 $0 \in V$ での接ベクトル $y_1, y_2 \in T_0\mathcal{U}_V \equiv V$ について $(g_V)_0(y_1, y_2) = (y_1|y_2)$ となるように定義する.

定理 5 ([12, Theorem 2.1]). 正規ヘッセ領域 $(V, \triangle)$ から定まる $(\mathcal{U}_V, g_V)$ は等質ヘッセ領域であり, 全ての等質ヘッセ領域はこのようにして得られる.

3.2. 正規ヘッセ代数 $(V, \triangle)$ が単位元 $E \in V$ を持つ場合を考える. このとき (NHA2) において $x = E$ とすると $(y|z) = (y \triangle z|E)$ となるから, (NHA2') が満たされて $(V, \triangle)$ はクランになる. 群 G_V の V への線型作用 σ を $\sigma(\exp x) := \exp L_x \in \mathrm{GL}(V)$ $(x \in \mathfrak{g}_V)$ で定義し, $\Omega_V = \sigma(G_V) \cdot E \subset V$ とする. このとき Ω_V は正則凸錐で, 群 G_V は Ω_V 上に単純推移的に作用する ([14, Chapter 2]). 函数 $\eta_V : \Omega_V \to \mathbb{R}_+$ を $\eta_V(\sigma(\exp x)E) := e^{-(x|E)}$ $(x \in \mathfrak{g}_V)$ によって定義すると, η_V は G_V の作用 σ に関して相対不変であり, そして認容的である ([7], [10]). この η_V のヘッシアンが与える計量 g^{η_V} によって (Ω_V, g^{η_V}) は等質ヘッセ領域となる. 一般に $l_x(y) = x + x \triangle y = L_x(E + y)$ $(x, y \in V)$ であるから, 群 G_V の作用 ρ と σ の間には

$$E + \rho(h)y = \sigma(h)(E + y) \quad (y \in V,\ h \in G_V) \tag{3.1}$$

の関係があり, よって $E + \mathcal{U}_V = \Omega_V$ となる.

命題 6. 写像 $\mathcal{U}_V \ni x \mapsto E + x \in \Omega_V$ はヘッセ領域 $(\mathcal{U}_V, g_V)$ から (Ω_V, g^{η_V}) への等距離同型写像である.

3.3. 一般の正規ヘッセ代数については次の構造定理が成り立つ.

定理 7 ([12, Section 3]). (i) $I := \{x \in V\,;\, x \triangle x = 0\}$ とすると I は V の両側イデアルで, 任意の $x, y \in I$ について $x \triangle y = 0$.
(ii) I の直交補空間を $U \subset V$ とすると, U は V の部分代数である.
(iii) $U \neq \{0\}$ のとき, 或るベキ等元 $E_0 \in U$ が存在して $(x|y) = (x \triangle y|E_0)$ $(x, y \in U)$ となる.
(iv) $V_\mu := \{x \subset V\,;\, E_0 \triangle x = \mu x\}$ とすると $V = V_1 \oplus V_{1/2} \oplus V_0$ となる. さらに $I_\mu := I \cap V_\mu$, $U_\mu := U \cap V_\mu$ とすると $I = I_{1/2} \oplus I_0$ および $U = U_1 \oplus U_{1/2}$ が成り立つ.
(v) 次の関係式が成り立つ:

$$\begin{array}{llll}
U_1 \triangle U_1 \subset U_1, & U_1 \triangle U_{1/2} \subset U_{1/2}, & U_{1/2} \triangle U_1 = \{0\}, & U_{1/2} \triangle U_{1/2} \subset U_1, \\
U_1 \triangle I_{1/2} \subset I_{1/2}, & I_{1/2} \triangle U_1 \subset I_{1/2}, & U_1 \triangle I_0 = \{0\}, & I_0 \triangle U_1 = \{0\}, \\
U_{1/2} \triangle I_{1/2} = \{0\}, & I_{1/2} \triangle U_{1/2} \subset I_0, & U_{1/2} \triangle I_0 \subset I_{1/2}, & I_0 \triangle U_{1/2} \subset I_{1/2}.
\end{array}$$

定理 7 において, 部分空間 $U_1, U_{1/2}, I_{1/2}, I_0$ のいずれかが $\{0\}$ になることはあり得る. 実際, V がクランならば $I = \{0\}$ であり, さらに V が単位元をもてば $U_{1/2} = \{0\}$ である.

一般に U_1 は E_0 を単位元とするクランであり, それに付随する等質錐 $\Omega_1 = \Omega_{U_1}$ および認容函数 $\eta_1 = \eta_{U_1} : \Omega_1 \to \mathbb{R}_+$ を小節 3.2 に従って考えることができる. 適当

な正規直交基底をとることにより $U_{1/2}$, $I_{1/2}$, I_0 をそれぞれ $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$, $\mathbb{R}^m$ と同一視し, $Q : U_{1/2} \times U_{1/2} \to U_1$, $\Phi : U_1 \to \mathrm{Sym}(I_{1/2}) \simeq \mathrm{Sym}(q, \mathbb{R})$ と $\diamond : U_{1/2} \times I_{1/2} \to I_0$ を

$$Q(u, u') := u \triangle u', \quad \Phi(x)v := v \triangle x \ \ (v \in I_{1/2}), \quad u \diamond v := v \triangle u \tag{3.2}$$

と定めると, これらのデータから拡張ジーゲル領域 $(D(\Omega_1, Q) \times I, g^{\eta_1, Q, \Phi, \diamond})$ が定義できる. このとき $u_0 \in U_{1/2}$, $v_0 \in I_{1/2}$ および $w_0 \in I_0$ をリー代数 $\mathfrak{g}_V$ の元とみなすと, $y \in V$ について $E_0 + \rho(\exp u_0)y = \tau^1_{u_0}(E_0 + y)$, $\quad E_0 + \rho(\exp v_0)y = \tau^2_{v_0}(E_0 + y)$, および $E_0 + \rho(\exp w_0)y = \tau^3_{w_0}(E_0 + y)$ が成り立つ. このことと (2.6) および命題 6 から次の定理を得る.

定理 8. 正規ヘッセ代数 $(V, \triangle)$ に付随する等質ヘッセ領域 $(\mathcal{U}_V, g_V)$ は拡張ジーゲル領域 $(D(\Omega_1, Q) \times I, g^{\eta_1, Q, \Phi, \diamond})$ と写像 $\mathcal{U}_V \ni y \mapsto E_0 + y \in D(\Omega_1, Q) \times I$ によって同型となる.

とくに V がクランの場合は $I = \{0\}$ なので, 対応するのは実ジーゲル領域 $D(\Omega_1, Q)$ である ([14, Chapter 2, Proposition 5]).

3.4. ベクトル空間 $\mathrm{Sym}(r+2, \mathbb{R})$ の内積をこれまで同様 $(x|x') := \mathrm{tr}\,(xx')$ によって定め, 部分空間

$$V_r := \{\, x \in \mathrm{Sym}(r+2, \mathbb{R})\,;\, x_{11} = x_{r+2, r+2} = 0 \,\}$$

への直交射影を $P_r : \mathrm{Sym}(r+2, \mathbb{R}) \to V_r$ とする. 対称行列 $x \in \mathrm{Sym}(r+2, \mathbb{R})$ に対し, 下三角行列 $\underset{\sim}{x} \in \mathrm{Mat}(r+2, \mathbb{R})$ を $x = \underset{\sim}{x} + {}^t(\underset{\sim}{x})$ となるものとして定める. ベクトル空間 V_r 上の双線型な積 $\triangle$ を

$$x \triangle y := P_r(\underset{\sim}{x} y + y \hat{x}) \qquad (x, y \in V_r)$$

(ただし $\hat{x} := {}^t(\underset{\sim}{x}) \in \mathrm{Mat}(r+2, \mathbb{R})$) と定義すると $(V_r, \triangle)$ は正規ヘッセ代数であり,

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & x & \\ & & 0 \end{pmatrix} ; x \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}) \right\}, \quad U_{1/2} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & {}^t u/\sqrt{2} & \\ u/\sqrt{2} & O & \\ & & 0 \end{pmatrix} ; u \in \mathbb{R}^r \right\},$$

$$I_{1/2} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & O & v/\sqrt{2} \\ & {}^t v/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} ; v \in \mathbb{R}^r \right\}, \quad I_0 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & w/\sqrt{2} \\ & O & \\ w/\sqrt{2} & & 0 \end{pmatrix} ; w \in \mathbb{R} \right\}$$

となる. この $(V_r, \triangle)$ には小節 2.4 で考察した拡張ジーゲル領域が対応する.

§4. 双対ヘッセ代数.

4.1. 正規ヘッセ代数 $(V, \triangle)$ についてV 上の双線型写像 $\triangledown : V \times V \to V$ を

$$(x \triangledown y|z) = (y|x \triangle z) \qquad (x, y, z \in V) \tag{4.1}$$

となるように定義する. たとえば, 小節 3.4 の正規ヘッセ代数 $(V_r, \triangle)$ については

$$x \triangledown y = P_r(\hat{x}y + y\underset{\sim}{x}) \qquad (x, y \in V_r)$$

である.

補題 9. 組 $(V, \triangledown)$ は正規ヘッセ代数である.

正規ヘッセ代数 $(V, \triangledown)$ を, もとの代数 $(V, \triangle)$ の双対ヘッセ代数とよぶ.

4.2. 代数 $(V, \triangle)$ が単位元 $E \in V$ をもつとき, E は $(V, \triangledown)$ の単位元でもある. このとき $(V, \triangledown)$ に対応する等質錐は $(V, \triangle)$ に対応する等質錐 Ω_V の双対錐である ([14, Chapter 3, Section 6], [5, Section 3]).

一般の正規ヘッセ代数 $(V, \triangle)$ が定理 7 に従って $V = U_1 \oplus U_{1/2} \oplus I_{1/2} \oplus I_0$ と分解されていて, 他方 $(V, \triangledown)$ は $V = U_1' \oplus U_{1/2}' \oplus I_{1/2}' \oplus I_0'$ と分解されているとすると, ベクトル空間として $U_1' = U_1$, $I_0' = I_0$ および $U_{1/2}' = I_{1/2}$, $I_{1/2}' = U_{1/2}$ が成り立つ. さらに各々の分解から定義される $\eta_1, Q, \Phi, \diamond$ は (1.4), (2.1), (2.7) および (2.8) の意味で互いに双対になっている. したがって定理 4 から, 我々は次の結果を得る.

定理 10. 正規ヘッセ代数 $(V, \triangle)$ に対応する拡張ジーゲル領域と双対ヘッセ代数 $(V, \triangledown)$ に対応する拡張ジーゲル領域はヘッセ領域として互いに双対である.

References

[1] J. Dorfmeister and M. Koecher, *Reguläre Kegel*, Jahresber. Deutsch. Math. -Verein., **81** (1979), 109–151.

[2] J. Faraut and A. Korányi, "Analysis on symmetric cones," Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[3] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys, **19** (1964), 1–89.

[4] H. Ishi, *Representations of the affine transformation groups acting simply transitively on homogeneous Siegel domains* J. Funct. Anal., **167** (1999), 425-462.

[5] —, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory, **11** (2001), 155–171.

[6] —, *The gradient maps associated to certain non-homogeneous cones*, Proc. Japan Acad., **81** (2005), 44-46.

[7] C. Kai and T. Nomura, *A characterization of symmetric cones through pseudoinverse maps*, J. Math. Soc. Japan, **57** (2005), 195–215.

[8] —, *A characterization of symmetric tube domains by convexity of Cayley transform images*, Diff. Geom. Appl., **23** (2005), 38–54.

[9] J.-L. Koszul, *Domaines bornés homogènes et orbites de groupes de transformations affines*, Bull. Soc. Math. France, **89** (1961), 515–533.

[10] T. Nomura, *Family of Cayley transforms of a homogeneous Siegel domain parametrized by admissible linear forms*, Diff. Geom. Appl., **18** (2003), 55–78.

[11] O. S. Rothaus, *The construction of homogeneous convex cones*, Ann. of Math., **83** , 358–376, Correction: ibid, **87** (1968), 399.

[12] H. Shima, *Homogeneous Hessian manifolds*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **30** (1980), 91–128.

[13] —, "ヘッセ幾何学," 裳華房, 東京, 2001.

[14] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.

[15] E. B. Vinberg and S. G. Gindikin, *Kaehlerian manifolds admitting a transitive solvable automorphism groups*, Math. Sb., **74(116)** (1967), 333–351.